Méthode de Newton

Théorème 1. *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, et soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $f(a) < 0 < f(b)$ et $f' > 0$ sur $[a,b]$. On considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :*

$$x_0 \in [a,b] \quad \textit{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = \phi(x_n) = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

La fonction f admet un unique zéro $\alpha \in]a,b[$, et on a :

(i) Il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour $x_0 \in I =]\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon[$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge quadratiquement vers α, et il existe $C > 0$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |x_{n+1} - \alpha| \leqslant C|x_n - \alpha|^2$$

(ii) Si de plus $f'' > 0$ sur $[\alpha, b]$, alors, pour $x_0 \in]\alpha, b]$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante, et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant x_{n+1} - \alpha \leqslant C(x_n - \alpha)^2 \quad \textit{et} \quad x_{n+1} - \alpha \sim \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}(x_n - \alpha)^2$$

Puisque $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes opposés, le théorème des valeurs intermédiaires nous donne l'existence d'un zéro α de f dans $]a,b[$. Ce zéro est unique car f est strictement croissante sur $]a,b[$.

La méthode de Newton consiste à approcher α en partant de x_0 une approximation plus grossière (obtenue depuis une méthode 'moins efficace', comme la dichotomie). C'est intéressant car nous allons voir que la convergence de la méthode de Newton est quadratique.

L'idée est de remplacer la courbe de f par sa tangente au point x_n, d'équation : $y = f'(x_n)(x - x_n) + f(x_n)$. Cette tangente coupe justement l'axe des abscisses au point d'abscisse x_{n+1}.

Démonstration.

(i) La formule de Taylor-Lagrange nous donne, pour $x \in [a,b]$, l'existence d'un $z_x \in]\alpha, x[$ tel que :

$$f(\alpha) = f(x) + (\alpha - x)f'(x) + \frac{(\alpha - x)^2}{2} f''(z_x)$$

En divisant par $f'(x) > 0$, et puisque $f(\alpha) = 0$, on obtient :

$$0 = \frac{f(x)}{f'(x)} + \alpha - x + \frac{(\alpha - x)^2}{2}\frac{f''(z_x)}{f'(x)} \quad \text{puis} \quad \phi(x) - \alpha = x - \frac{f(x)}{f'(x)} - \alpha = \frac{(\alpha - x)^2}{2}\frac{f''(z_x)}{f'(x)}$$

On peut alors passer à la valeur absolue et majorer violemment :

$$|\phi(x) - \alpha| = \left|\frac{(\alpha - x)^2}{2}\frac{f''(z_x)}{f'(x)}\right| = \frac{|\alpha - x|^2}{2}|f''(z_x)|\left|\frac{1}{f'(x)}\right| \leqslant \frac{|\alpha - x|^2}{2}\|f''\|_{\infty,[a,b]}\left\|\frac{1}{f'}\right\|_{\infty,[a,b]}$$

En posant $C = \frac{1}{2}\|f''\|_{\infty,[a,b]}\left\|\frac{1}{f'}\right\|_{\infty,[a,b]}$, on obtient alors :

$$|\phi(x) - \alpha| \leqslant C|\alpha - x|^2$$

Considérons $\varepsilon > 0$ suffisamment petit pour que $C\varepsilon < 1$ et que $I =]\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon[\subset [a, b]$. Alors, pour $x \in I$, on a $|\phi(x) - \alpha| \leqslant C\varepsilon^2 < \varepsilon$, d'où $\phi(I) \subset I$. En prenant $x_0 \in I$, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est alors une suite de I, qui vérifie, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|x_{n+1} - \alpha| = |\phi(x_n) - \alpha| \leqslant C|x_n - \alpha|^2 \quad \text{et} \quad C|x_n - \alpha| \leqslant (C|x_0 - \alpha|)^{2^n} \leqslant (C\varepsilon)^{2^n}$$

L'inégalité voulue est donc bien vérifiée, et on a une convergence quadratique car $C\varepsilon < 1$.

(ii) Pour $x \in [\alpha, b]$, on a $f'(x) > 0$ et $f(x) \geqslant 0$, donc :

$$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} < x$$

De plus, par le premier point, on a :

$$\phi(x) - \alpha = \frac{1}{2} \frac{f''(z_x)}{f'(x)} (x - \alpha)^2 > 0$$

Ces deux inégalités donnent que l'intervalle $I = [\alpha, b]$ est stable par ϕ. Pour $x_0 \in I$, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc une suite de I strictement décroissante, elle converge donc vers une limite ℓ, qui doit être un point fixe de ϕ, donc $\ell = \alpha$, ceci donne le premier point. Pour le second, remarquons que, pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\frac{x_{n+1} - \alpha}{(x_n - \alpha)^2} = \frac{f''(z_{x_n})}{2f'(x_n)}$$

Par construction, on a $z_{x_n} \in]\alpha, x_n[$, donc la fraction converge vers $\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}$ par continuité. Donc :

$$x_{n+1} - \alpha \sim \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)} (x_n - \alpha)^2$$

□

Références

[Rou15] F. Rouvière. *Petit Guide de Calcul Différentiel.* Cassini